扭面土方量的计算方法及其工程应用*

张宽地[1], 裴金萍[1], 刘海军[1], 武海霞[2]
(1 西北农林科技大学 水利与建筑工程学院, 陕西 杨凌 712100;
2 华北水利水电学院 水电工程系, 河北 邯郸 1056021)

[摘　要]　在扭面特点分析的基础上, 用矢量法推求出扭面的参数方程, 同时针对传统土方量计算方法的不足, 给出了原地形为扭面时的土方量精确计算公式, 并对该公式的应用及误差分析进行了实例说明。结果表明, 该公式误差小, 计算精度高, 适应面广。

[关键词]　扭面; 土石方计算; 矢量法; 参数方程
[中图分类号]　TV 541　　[文献标识码]　A　　[文章编号]　1671-9387(2005)09-0146-03

在道路、河堤、渠道、梯田工程设计中, 土方计算是一项必要而繁琐的工作, 传统的土方量计算多采用网格法、条分法、解析法等计算横断面的填挖方面积, 再用平均断面法或者平均距离法计算填挖方量。针对传统计算方法误差较大的缺点, 罗阳军等[1]提出了用三次样条函数拟合断面面积函数, 再运用 Grauss-Lobatto 求积公式计算土方量的新方法, 其精度高, 适应面广, 且具有程序化的特点[1~3]。

但无论是传统的计算方法, 还是罗阳军等提出的三次样条函数法, 都假定挖填方工程与原地面的横向交界线为水平线。而实际工程中经常遇到原地形为扭面的情况, 显然以上方法并不能很好地拟合实际挖填情况, 更谈不上精确计算。为此, 本研究用矢量法推求了扭面的参数方程, 并研究了地形概化为扭面时的填挖土方量计算方法, 以期弥补传统计算方法的不足, 从而使土石方的计算更趋于精确。

1　扭面的概念

如图 1 所示, 空间不在同一平面的 4 个点 M_1, M_2, M_3 和 M_4 构成了一个不规则曲面, 任意过一组对边 M_1M_2 和 M_3M_4 直线的相应定比分点 G, H 的直线 GH (也称素线), 或者过一组对边 M_1M_4 和 M_2M_3 直线的相应定比分点 E, F 的直线 EF (也称素线) 都在曲面内, 且相邻素线都为交叉直线的曲面在工程中称为扭面[4]。

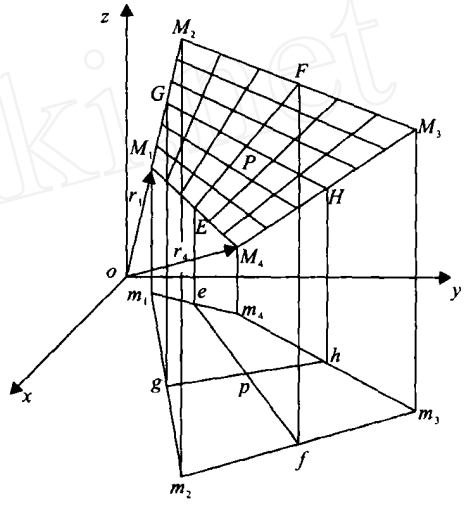

图 1　扭面示意图

Fig. 1　Sktech of twist surface

2　扭面的方程

由扭面的定义可知, 任意给定不在同一平面的 4 个点就惟一确定 1 个扭面, 且素线都为直线, 由此可以用矢量法推求曲面方程:

直线 L_{12} 的矢量方程为

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{S}_{12}\lambda = \vec{r}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\lambda \qquad (1)$$

直线 L_{34} 的矢量方程为

$$\vec{r} = \vec{r}_4 + \vec{S}_{34}\lambda = \vec{r}_4 + (\vec{r}_3 - \vec{r}_4)\lambda \qquad (2)$$

式中, $\vec{r}_1$～$\vec{r}_4$ 为 M_1～M_4 各点到原点的距离, 即矢径; $\vec{S}_{12}$ 为直线 L_{12} 的方向矢量; $\vec{S}_{34}$ 为直线 L_{34} 的方向

* [收稿日期]　2004-09-14
[基金项目]　西北农林科技大学青年重点项目(080807)
[作者简介]　张宽地(1978-), 男, 宁夏隆德人, 助教, 在读硕士, 主要从事水力学研究。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

矢量; λ 为变量。

在导线 L_{12} 上取一点 E, 则导线 L_{34} 上有相应的等分点 F, 使得 $\lambda_E = \lambda_F$, 点 E, F 的矢量分别为

$$\vec{r}_E = \vec{r}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\lambda_E \tag{3}$$

$$\vec{r}_F = \vec{r}_4 + (\vec{r}_3 - \vec{r}_4)\lambda_E \tag{4}$$

由此可得素线 EF 的方向矢量为

$$\vec{S}_{EF} = \vec{r}_F - \vec{r}_E = \vec{r}_4 - \vec{r}_1 + (\vec{r}_1 + \vec{r}_3 - \vec{r}_2 - \vec{r}_4)\lambda_E \tag{5}$$

在素线 EF 上取定比分点 P, 该点的位置矢量为

$$\vec{r}_P = \vec{r}_E + \vec{S}_{EF}k_P \tag{6}$$

式中, k_P 为线段 E_P 与 E_F 的长度比。

将(3), (5)式代入(6)式得

$$\vec{r}_P = \vec{r}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\lambda_E + (\vec{r}_4 - \vec{r}_1)k_P + (\vec{r}_1 + \vec{r}_3 - \vec{r}_2 - \vec{r}_4)\lambda_E k_P \tag{7}$$

设过点 P 的另一条素线为 GH, 则点 P 的位置矢量为

$$\vec{r}_P = \vec{r}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\lambda_E + (\vec{r}_4 - \vec{r}_1)k_G + (\vec{r}_1 + \vec{r}_3 - \vec{r}_2 - \vec{r}_4)\lambda_E k_G \tag{8}$$

式中, k_G 为线段 GP 与 GH 的长度比。

由 $k_P = k_G$ 可知, EF, GH 两组素线的方程为:

$$\vec{r}_k = \vec{r}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\lambda + (\vec{r}_4 - \vec{r}_1)k + (\vec{r}_1 - \vec{r}_3 - \vec{r}_2 - \vec{r}_4)\lambda k \tag{9}$$

式中, k 为常数; λ 为变量。

$$\vec{r}_\lambda = \vec{r}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\lambda + (\vec{r}_4 - \vec{r}_1)k + (\vec{r}_1 - \vec{r}_3 - \vec{r}_2 - \vec{r}_4)\lambda k \tag{10}$$

式中, λ 为常数; k 为变量。

由(9), (10)式可知, 扭面的矢量方程为

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\lambda + (\vec{r}_4 - \vec{r}_1)k + (\vec{r}_1 - \vec{r}_3 - \vec{r}_2 - \vec{r}_4)\lambda k \tag{11}$$

式中, λ, k 均为变量。

设扭面的 4 个端点 M_1, M_2, M_3, M_4 的坐标为 (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4), 则曲面的数量方程为:

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)\lambda + (x_4 - x_1)k + (x_1 + x_3 - x_2 - x_4)\lambda k \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)\lambda + (y_4 - y_1)k + (y_1 + y_3 - y_2 - y_4)\lambda k \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)\lambda + (z_4 - z_1)k + (z_1 + z_3 - z_2 - z_4)\lambda k \end{cases} \tag{12}$$

式中, λ, k 均为变量。

3　以扭面为曲顶的柱体体积计算

以扭面为曲顶的柱体体积可以由下式求双重积分得到, 即 $V = \iint_{D_{\lambda k}} F(\lambda, k)\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}k$, 也可表示为:

$$V = \iint_{D_{\lambda k}} F(\lambda, k)\,|J|\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}k \tag{13}$$

式中, $|J|$ 为雅可比行列式。其计算公式为:

$$|J| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \lambda} & \dfrac{\partial x}{\partial k} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \lambda} & \dfrac{\partial x}{\partial k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 + (x_1 + x_3 + x_2 - x_4)k & x_4 - x_1 + (x_1 + x_3 - x_2 - x_4)\lambda \\ y_2 - y_1 + (y_1 + y_3 + y_2 - y_4)k & y_4 - y_1 + (y_1 + y_3 - y_2 - y_4)\lambda \end{vmatrix}$$

令行列式 $\begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix} = \nabla_{ij}$, 其中 $i, j \in 1, 4$; 则

$$|J| = \nabla_{24} + \nabla_{12} - \nabla_{14} + (\nabla_{14} - \nabla_{24} - \nabla_{13} + \nabla_{23})\lambda + (\nabla_{13} - \nabla_{24} - \nabla_{43} - \nabla_{24} - \nabla_{12})k \tag{14}$$

被积函数 $F(\lambda, k) = z(\lambda, k)|J| = [z_1 + (z_2 - z_1)\lambda + (z_4 - z_1)k + (z_1 + z_3 - z_2 - z_4)\lambda k]|J|$, 由此可得

$$V = \iint_{D_{\lambda k}} F(\lambda, k)\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}k = -\frac{1}{12}\begin{bmatrix} z_1(\nabla_{24} + 2\nabla_{12} + \nabla_{23} - 2\nabla_{14} - \nabla_{43}) + z_3(-\nabla_{24} + \nabla_{12} + 2\nabla_{23} - \nabla_{14} - 2\nabla_{43}) + \\ z_2(-\nabla_{13} + 2\nabla_{12} + 2\nabla_{23} - \nabla_{14} - \nabla_{43}) + z_4(\nabla_{13} + \nabla_{12} + \nabla_{23} - 2\nabla_{14} - 2\nabla_{43}) \end{bmatrix} \tag{15}$$

在实际工程中, 起始端面与终止端面都垂直于纵向轴线, 即 M_1 与 M_4 的 x 坐标设为零, M_3 与 M_2 的 x 坐标相等。故公式(14)还可以进一步简化为:

$$V = -\frac{1}{12}[(z_1 + z_4)(2\nabla_{24} + 2\nabla_{12} + \nabla_{23}) + (z_3 + z_2)(\nabla_{24} + \nabla_{12} + 2\nabla_{23})] \tag{16}$$

公式(16)是以扭面为曲顶的柱体体积简化公式, 用该公式可以较精确的计算道路、河堤、渠道工程的挖填土方量。

4　算　例

某道路工程中, 路面宽 24 m, 填方坡比 1∶2.0, 设计路面高程 594.00 m, 原地形面可概化为扭面(图 2), 分别用本文公式和平均断面法、网格法计算填方土方量, 计算结果见表 1。表 1 中的实际土方量均采用直接积分法算出[5~7]。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

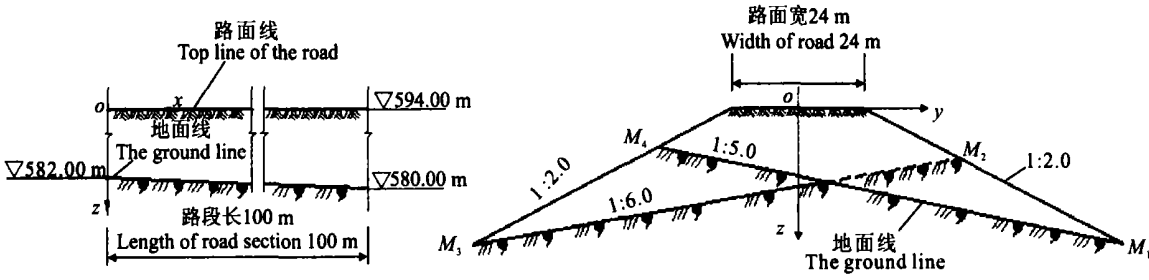

图 2 某道路工程的纵横断面

Fig. 2 Vertical and cross section of a road project

表 1 某道路工程土方量的计算

Table 1 Earthwork calculations of a road project

地面中心高程/m The center of originally ground elevation		路面设计高程/m Design elevation of road	断面端点 Section extreme point	坐标/m Coordinate			土方量/m³ Earthwork calculation			
起始端面 Initial section	终止端面 Finally section			X	Y	Z	实际土方量 Practical earth volume	平均断面法 Average cross-setion method	网格法[8] Check network method	本文公式 This paper formula
582.00	580.00	594.00	M_1	0	60.003	24.002	84 948.40	76 873.18	78 685.20	85 055.18
			M_2	100	30.000	9.000				
			M_3	100	-60.000	24.000				
			M_4	0	-25.716	6.858				
相对误差/% Relation error								9.51	7.37	0.12

由表 1 可见, 无论是平均断面法还是网格法, 误差均超过 5%, 而用本文公式计算时的相对误差仅为 0.12%, 表明本文提出的公式在复杂地形上适应性强, 计算结果的误差较传统计算方法小得多。

5 结 论

1) 不管是传统计算方法还是改进的各种计算方法, 都假定土方工程与原地面的横向交界线为水平线, 这对于地形起伏变化不大的线形工程是可行的, 且能满足精度要求。但对于复杂地形, 如扭面地形, 横向地形变化是不容忽视的, 假定土方工程与原地面的横向交界线为水平线是导致传统计算方法误差较大的根本原因。

2) 本研究用矢量法推导了扭面的参数方程, 并在此基础上用二重积分法求出了以扭面为曲顶的柱体体积精确计算公式, 该公式克服了传统计算方法的局限性, 符合实际挖填情况, 因而精度较高。

3) 本研究公式虽然是以扭面为原地形推导出的精确计算方法, 但其同样适用于土石方工程与原地面横向交界线为水平线的情况, 该公式不但精度高、适应面广, 且便于程序化。

[参考文献]

[1] 罗阳军, 张宽地, 王 铭, 等. 数值方法在渠道土方计算中的运用[J]. 灌溉排水, 2003, 22(增刊): 94-96.

[2] 王 铭, 宋天峰, 罗阳军. 平均断面法计算渠道土方量的本质缺陷及改进[J]. 西北农林科技大学学报(自然科学版), 2004, 32(9): 118-122.

[3] 刘崇选, 高双强. 渠槽、路基等土方量计算[J]. 陕西水利发电, 2001, 17(3): 61-64.

[4] 蒋允静. 画法几何与工程制图[M]. 陕西西安: 陕西科技出版社, 2003.

[5] 杨晓东. 数解法在江堤土方量计算中的应用[J]. 水利天地, 2002, (2): 42.

[6] 邓建中. 计算方法[M]. 陕西西安: 西安交通大学出版社, 1985.

[7] 刘炳文, 许蔓舒. Visual Basic 程序设计教程[M]. 北京: 清华大学出版社, 2000.

[8] 潘晓丽. 大型基坑土方工程量计算探误及其算法推荐[J]. 重庆建筑大学学报, 2000, 22(2): 123-127.

(下转第 155 页)

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

The quantification study of watershed topography characteristics

ZHU Yong-qing[1,3], **LI Zhan-bin**[1,2], **CUI Ling-zhou**[1,4]

(1 *College of Hudrology and Electricity, Xi'an University of Technology, Xi'an, Shaanxi* 710048, *China*;
2 *The State Key Laboratory of Soil Erosion and Dryland Farming on The Loess Plateau, Yangling, Shaanxi* 712100, *China*;
3 *The Monitoring Center Station of Changjiang Watershed Water and Soil Conservation, Wuhan, Hubei* 430010, *China*;
4 *College of Life and Environment Sciences, Wenzhou University, Wenzhou, Zhejiang* 325027, *China*)

Abstract: The paper focused on the subject about quantification study of watershed topography characteristics, and discussed the actuality and evolution on the study of watershed topography characteristics measurement methods at home and abroad respectively in those aspects of map paper drawing, mathematical statistics, topography factor of soil erosion model, fractal topography, etc. and clarified the existing problems which occured in watershed topography characterics measurement study, finally discussed the development direction of the study of watershed topography characteristics.

Key words: topography; characteristic quantification; fractal study; watershed harness

(上接第 148 页)

Abstract ID: 1671-9387(2005)09-0146-EA

Study of twist surface's earthwork calculation method and its engineering application

ZHANG Kuan-di[1], **PEI Jin-ping**[1], **LIU Hai-jun**[1], **WU Hai-xia**[2]

(1 *College of Water Resource and Architectural Engineering, Northwest A & F University, Yangling, Shaanxi* 712100, *China*;
2 *College of Water Resource and Architectural Engineering, North China Institute of Water Conservancy Hydroelectric Power, Handan, Hebei* 1056021, *China*)

Abstract: Based on the analysis of features of twist surface, parametric equation of twist surface was creatively derived by using vector law. At the same time, aiming at the deficiency of traditional earthwork calculation, an accurate formula for the calculation of earthwork with original twist surface was provided, also, this paper demonstrated the application of this formula and error analysis. The result indicates that it is of little error, high accuracy and universal application.

Key words: twist surface; earthwork calculation; vector law; parametric equation

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net